

第十二章 微分方程

微分方程基本概念

同步练习

12.1.一

1. 微分方程 $x^3(y'')^4 - yy' = x$ 的阶数为 2.

解 阶数为未知函数导数的最高阶数.

12.1.一

2. 微分方程 $(y')^3 + y''' + xy^4 = x^2 - 1$ 的阶数为 3.

12.1.二

1. 设二阶微分方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$, 求其方程.

解 $y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$

$$y'' = C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{2x}$$

显然 y, y', y'' 满足 $y'' - y' - 2y = 0$

故所求方程为 $y'' - y' - 2y = 0$

12.1.二

2. 验证函数 $y = \sin(x + C)$ 是微分方程 $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ 的通解.

解 $y' = \cos(x + C)$

$$y' + y^2 - 1 = \cos^2(x + C) + \sin^2(x + C) - 1 = 0$$

函数 $y = \sin(x + C)$ 含任意常数 C ,

故函数 $y = \sin(x + C)$ 是通解.

12.1.二

3. 求微分方程 $x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$ 的形如 $y = x^k$ 的解.

解 $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$

代入微分方程 $x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$ 得

$$x^2 k(k-1)x^{k-2} + 6xkx^{k-1} + 4x^k = 0$$

$$k(k-1)x^k + 6kx^k + 4x^k = 0$$

$$k(k-1) + 6k + 4 = 0$$

$$k^2 + 5k + 4 = 0 \quad k_1 = -1, k_2 = -4$$

形如 $y = x^k$ 的解为 $y = x^{-1}$ 或 $y = x^{-4}$